

LB  
BRIS

We know  
books

8

MATE<sup>®</sup>  
2000<sup>+</sup>

consolidare

Anton Negrilă  
Maria Negrilă

partea I

# matematică

algebră • geometrie

Editura Paralela 45

|                                                                                                          |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>RECAPITULARE ȘI EVALUARE ÎNȚĂLĂ</b> .....                                                             | 5  |
| Teste cu exerciții și probleme recapitulative pentru pregătirea testării inițiale .....                  | 5  |
| <b>ALGEBRĂ</b>                                                                                           |    |
| <b>Capitolul I: INTERVALE DE NUMERE REALE. INECUAȚII ÎN <math>\mathbb{R}</math></b> .....                | 11 |
| 1. Mulțimi de numere. Forme de scriere a unui număr .....                                                | 12 |
| <i>Test de autoevaluare</i> .....                                                                        | 17 |
| 2. Reprezentarea pe axă. Ordonarea numerelor reale. Valoarea absolută. Aproximarea numerelor reale ..... | 19 |
| Recapitulare și sistematizare prin teste .....                                                           | 24 |
| <i>Test de autoevaluare</i> .....                                                                        | 25 |
| 3. Mulțimi definite printr-o proprietate comună a elementelor lor .....                                  | 27 |
| 4. Intervale în $\mathbb{R}$ . Definiție. Reprezentare pe axă .....                                      | 28 |
| 5. Operații cu intervale .....                                                                           | 32 |
| Recapitulare și sistematizare prin teste .....                                                           | 38 |
| <i>Test de autoevaluare</i> .....                                                                        | 39 |
| 6. Inecuații de forma $ax + b \geq 0$ ( $\leq$ , $>$ , $<$ ), unde $a, b \in \mathbb{R}$ .....           | 41 |
| Recapitulare și sistematizare prin teste .....                                                           | 44 |
| <i>Test de autoevaluare</i> .....                                                                        | 45 |
| <b>Capitolul II: CALCUL ALGEBRIC ÎN <math>\mathbb{R}</math></b> .....                                    | 47 |
| <b>A. Operații cu numere reale reprezentate prin litere</b> .....                                        | 48 |
| 1. Adunarea și scăderea numerelor reale reprezentate prin litere .....                                   | 48 |
| 2. Înmulțirea și împărțirea numerelor reale reprezentate prin litere .....                               | 51 |
| 3. Ridicarea la putere cu exponent număr natural a numerelor reale reprezentate prin litere .....        | 55 |
| 4. Ordinea efectuării operațiilor cu expresii algebrice .....                                            | 57 |
| Recapitulare și sistematizare prin teste .....                                                           | 60 |
| <i>Test de autoevaluare</i> .....                                                                        | 61 |
| 5. Formule de calcul prescurtat .....                                                                    | 63 |
| Recapitulare și sistematizare prin teste .....                                                           | 68 |
| <i>Test de autoevaluare</i> .....                                                                        | 69 |
| 6. Descompuneri în factori utilizând reguli de calcul în $\mathbb{R}$ .....                              | 71 |
| 6.1. Metoda factorului comun .....                                                                       | 71 |
| 6.2. Utilizarea formulelor de calcul prescurtat .....                                                    | 73 |
| 6.3. Gruparea termenilor .....                                                                           | 77 |
| 6.4. Metode combinate .....                                                                              | 79 |
| 6.5. Maxime și minime. Inegalități algebrice .....                                                       | 84 |
| Recapitulare și sistematizare prin teste .....                                                           | 87 |
| <i>Test de autoevaluare</i> .....                                                                        | 89 |
| <b>B. Rapoarte de numere reale reprezentate prin litere</b> .....                                        | 91 |
| 7. Amplificarea. Simplificarea .....                                                                     | 91 |
| <i>Test de autoevaluare</i> .....                                                                        | 97 |

## Capitolul I: ELEMENTE ALE GEOMETRIEI ÎN SPAȚIU

|                                                                                                                                                                                          |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 1. Puncte, drepte, plane. Determinarea dreptei .....                                                                                                                                     | 99  |
| 2. Determinarea planului .....                                                                                                                                                           | 100 |
| 3. Corpuri geometrice.....                                                                                                                                                               | 102 |
| 3.1. Piramida, piramida regulată, tetraedrul regulat.....                                                                                                                                | 104 |
| 3.2. Prisma dreaptă. Paralelipipedul dreptunghic. Cubul.....                                                                                                                             | 107 |
| 3.3. Cilindrul circular drept. Conul circular drept.....                                                                                                                                 | 110 |
| Test de autoevaluare .....                                                                                                                                                               | 113 |
| 4. Pozițiile relative a două drepte în spațiu, relația de paralelism în spațiu .....                                                                                                     | 115 |
| 5. Unghiuri cu laturile respectiv paralele. Unghiul a două drepte în spațiu. Drepte perpendiculare .....                                                                                 | 117 |
| 6. Pozițiile relative ale unei drepte față de un plan.....                                                                                                                               | 119 |
| Recapitulare și sistematizare prin teste.....                                                                                                                                            | 123 |
| Test de autoevaluare .....                                                                                                                                                               | 125 |
| 7. Pozițiile relative a două plane. Plane paralele .....                                                                                                                                 | 127 |
| 8. Secțiuni paralele cu baza în corpurile geometrice studiate. Trunchiul de piramidă. Trunchiul de con circular drept .....                                                              | 130 |
| 9. Probleme de matematică aplicată în viața cotidiană.....                                                                                                                               | 133 |
| 10. Perpendicularitate.....                                                                                                                                                              | 134 |
| 10.1. Dreaptă perpendiculară pe un plan. Distanța de la un punct la un plan.....                                                                                                         | 134 |
| Test de autoevaluare .....                                                                                                                                                               | 137 |
| 10.2. Înălțimea unei piramide. Înălțimea unui con circular drept.....                                                                                                                    | 139 |
| 10.3. Distanța dintre două plane paralele. Înălțimea prisme. Înălțimea cilindrului circular drept. Înălțimea trunchiului de piramidă. Înălțimea trunchiului de con .....                 | 140 |
| Recapitulare și sistematizare prin teste.....                                                                                                                                            | 143 |
| Test de autoevaluare .....                                                                                                                                                               | 145 |
| 10.4. Plane perpendiculare.....                                                                                                                                                          | 147 |
| 11. Proiecții de puncte, de segmente și de drepte pe un plan.....                                                                                                                        | 149 |
| 12. Unghiul dintre o dreaptă și un plan. Lungimea proiecției unui segment.....                                                                                                           | 151 |
| Recapitulare și sistematizare prin teste.....                                                                                                                                            | 154 |
| Test de autoevaluare .....                                                                                                                                                               | 155 |
| 13. Unghi diedru. Unghi plan corespunzător diedrului. Unghiul dintre două plane .....                                                                                                    | 157 |
| Recapitulare și sistematizare prin teste.....                                                                                                                                            | 160 |
| Test de autoevaluare .....                                                                                                                                                               | 161 |
| 14. Teorema celor trei perpendiculare. Calculul distanței de la un punct la o dreaptă. Calculul distanței de la un punct la un plan. Calculul distanței dintre două plane paralele ..... | 163 |
| Recapitulare și sistematizare prin teste.....                                                                                                                                            | 167 |
| Test de autoevaluare .....                                                                                                                                                               | 169 |
| 15. Probleme de matematică aplicată în viața cotidiană.....                                                                                                                              | 171 |
| <b>TESTE RECAPITULATIVE</b> .....                                                                                                                                                        | 172 |
| <b>PROBLEME PENTRU PERFORMANȚĂ ȘCOLARĂ ȘI PREGĂTIREA OLIMPIADELOR</b> .....                                                                                                              | 177 |
| <b>INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI</b> .....                                                                                                                                                     | 181 |

**Capitolul I****INTERVALE DE NUMERE REALE.****INECUAȚII ÎN  $\mathbb{R}$** **PP** Competențe specifice

- C1. Recunoașterea apartenenței unui număr real la o mulțime
- C2. Efectuarea unor operații cu intervale numerice reprezentate pe axa numerelor sau cu mulțimi definite printr-o proprietate a elementelor ei
- C3. Utilizarea unor procedee matematice pentru operații cu intervale și rezolvarea inecuațiilor în  $\mathbb{R}$
- C4. Folosirea terminologiei aferente noțiunilor de mulțime, de interval numeric și de inecuații
- C5. Interpretarea unei situații date utilizând intervale și inecuații
- C6. Rezolvarea unor situații date, utilizând intervale numerice sau inecuații



**Mulțimea numerelor naturale**, notată cu  $\mathbb{N}$ , este  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ .

**OBSERVAȚII:**

• Mulțimea notată cu  $\mathbb{N}^*$  este  $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$  și  $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}$ .

• Avem, pentru orice  $x, y \in \mathbb{N}$ :

a)  $x + y \in \mathbb{N}$ ,  $x \cdot y \in \mathbb{N}$  și consecințele:  $x + y = 0$  înseamnă  $x = y = 0$ , iar  $x \cdot y = 1$  înseamnă  $x = y = 1$ .

b)  $x - y \in \mathbb{N}$  numai dacă  $x \geq y$ , iar  $x : y \in \mathbb{N}$  numai dacă există  $z \in \mathbb{N}$ , astfel încât  $y \cdot z = x$ . Dacă acest lucru nu are loc, se folosește teorema împărțirii cu rest:  $x = yz + t$ , cu  $t \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq t < y$ ,  $y \neq 0$ .

c)  $x^y \in \mathbb{N}$ , cu excepția cazului  $0^0$ .

**Mulțimea numerelor întregi**, notată cu  $\mathbb{Z}$ , este:  $\mathbb{Z} = \{\dots, -n, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ .

**OBSERVAȚII:**

•  $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ; în plus, se definesc:  $\mathbb{Z}^- = \{\dots, -n, \dots, -3, -2, -1\}$  și  $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ , cu  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Avem  $\mathbb{Z}^* \subset \mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ .

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$$

• Pentru  $x, y, z, t \in \mathbb{Z}$ , avem:

a)  $x + y \in \mathbb{Z}$ ,  $x - y \in \mathbb{Z}$ ,  $x \cdot y \in \mathbb{Z}$ .

b) Dacă  $x^2 + y^2 = 0$ , atunci  $x = y = 0$ .

c)  $x : y \in \mathbb{Z}$ ,  $y \neq 0$ , dacă și numai dacă există  $z \in \mathbb{Z}$ , cu  $x = yz$ . În caz contrar,  $x = yz + t$ , unde  $t \in \mathbb{Z}$  și  $0 \leq |t| < |y|$ .

**Mulțimea numerelor raționale**, notată cu  $\mathbb{Q}$ , este:  $\mathbb{Q} = \left\{ x \mid \text{există } y, z \in \mathbb{Z}, z \neq 0, \text{ astfel încât } x = \frac{y}{z} \right\}$ .

**OBSERVAȚII:**

• Avem  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ , iar mulțimea  $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$  se numește mulțimea numerelor raționale **neîntregi**. De asemenea,  $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ .

• Un **număr rațional** este reprezentat de o fracție de forma  $\frac{x}{y}$ , cu  $x \in \mathbb{Z}$  și  $y \in \mathbb{Z}^*$ . Vom spune că

două fracții  $\frac{x}{y}$  și  $\frac{z}{t}$ , cu  $x, z \in \mathbb{Z}$  și  $y, t \in \mathbb{Z}^*$ , se numesc **fracții echivalente** dacă  $xt = yz$ . Dată o

fracție  $\frac{x}{y}$ , se obțin fracții echivalente cu ea prin:

a) **amplificare**:  $\frac{x}{y} = \frac{x \cdot t}{y \cdot t}$ , cu  $x \in \mathbb{Z}$  și  $y, t \in \mathbb{Z}^*$ ;

b) **simplificare**:  $\frac{x}{y} = \frac{x : t}{y : t}$ , cu  $x \in \mathbb{Z}$ ,  $y, t \in \mathbb{Z}^*$  și  $t \mid x, t \mid y$ .

• O fracție  $\frac{x}{y}$ ,  $x, y \in \mathbb{Z}$ ,  $y \neq 0$ , este **ireductibilă** dacă  $(x, y) = 1$ .

• Un număr rațional care este reprezentat de o fracție  $\frac{x}{y}$ ,  $x, y \in \mathbb{Z}$ ,  $y \neq 0$ , se scrie sub formă zecimală împărțind numărătorul  $x$  la numitorul  $y$ .

În funcție de factorii în care se descompune numitorul fracției ireductibile  $\frac{x}{y}$ , fracția zecimală poate fi:

- a) fracție zecimală finită, dacă în descompunerea numitorului apar factori de 2 sau de 5;
- b) fracție zecimală periodică simplă, dacă descompunerea numitorului în produs de factori primi conține alți factori decât 2 și 5;
- c) fracție zecimală periodică mixtă, dacă descompunerea numitorului în produs de factori primi conține atât factori de 2 sau/și numai factori de 5, cât și un alt factor prim.

**Reciproc:** Dacă un număr rațional este reprezentat printr-o fracție zecimală, el poate fi scris sub formă de fracție ordinară folosind reguli de transformare pentru fiecare tip de fracție zecimală:

- a) fracție zecimală finită:  $\overline{a, b_1 b_2 b_3 \dots b_n} = \frac{ab_1 b_2 b_3 \dots b_n}{10^n}$ ;
- b) fracție zecimală periodică simplă:  $\overline{a, (b_1 b_2 b_3 \dots b_n)} = a \frac{\overline{b_1 b_2 b_3 \dots b_n}}{\underbrace{99 \dots 9}_{\text{de } n \text{ ori}}}$ ;
- c) fracție zecimală periodică mixtă:  $\overline{a, b_1 b_2 \dots b_n (c_1 c_2 \dots c_m)} = \frac{\overline{ab_1 b_2 \dots b_n c_1 c_2 \dots c_m} - \overline{ab_1 b_2 \dots b_n}}{\underbrace{999 \dots 9}_{\text{de } m \text{ ori}} \underbrace{000 \dots 0}_{\text{de } n \text{ ori}}}$ .

• Pentru orice  $x, y \in \mathbb{Q}$ , avem  $x + y \in \mathbb{Q}$ ,  $x - y \in \mathbb{Q}$ ,  $x \cdot y \in \mathbb{Q}$ ,  $x : y \in \mathbb{Q}$ ,  $y \neq 0$ ,  $x^y \in \mathbb{Q}$ ,  $x \neq 0$ .

**Mulțimea numerelor iraționale**, notată cu  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , este mulțimea numerelor care se scriu zecimal cu o infinitate de zecimale care nu se repetă periodic.

**Mulțimea numerelor reale**, notată cu  $\mathbb{R}$ , este mulțimea formată din reuniunea mulțimii numerelor raționale cu mulțimea numerelor iraționale. În mod asemănător,  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Avem șirul incluziunilor:  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ .

## ACTIVITĂȚI DE ÎNVĂȚARE

### PE ÎNȚELEGERE ♦

1. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

- |                                                               |                                                             |                                                           |                                                                |                                                             |
|---------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|
| a) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ ;                          | b) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ ;                        | c) $\mathbb{N} \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ; | d) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}$ ;                         | e) $\mathbb{N} \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ ;   |
| f) $\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{N}$ ;                      | g) $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z} \setminus \mathbb{Q}$ ; | h) $\mathbb{Q} \not\subset \mathbb{Z}$ ;                  | i) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ;    | j) $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ ; |
| k) $\mathbb{R} \not\subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ; | l) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ ; | m) $\emptyset \subseteq \mathbb{Q}$ ;                     | n) $\emptyset \not\subset \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}^*$ ; | o) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}^*$ .                    |

2. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

- |                                |                                                     |                                                   |                                          |                              |
|--------------------------------|-----------------------------------------------------|---------------------------------------------------|------------------------------------------|------------------------------|
| a) $8 \in \mathbb{N}$ ;        | b) $8 \in \mathbb{Z}$ ;                             | c) $8 \in \mathbb{Q}$ ;                           | d) $8 \in \mathbb{R}$ ;                  | e) $-6 \in \mathbb{Z}$ ;     |
| f) $-6 \in \mathbb{N}$ ;       | g) $-\frac{7}{3} \in \mathbb{Q}$ ;                  | h) $-8,3 \in \mathbb{R}$ ;                        | i) $-\frac{9}{3} \in \mathbb{Z}$ ;       | j) $4, (5) \in \mathbb{Q}$ ; |
| k) $\sqrt{8} \in \mathbb{R}$ ; | l) $\sqrt{8} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ; | m) $\sqrt{25 - (-3) \cdot (-8)} \in \mathbb{N}$ ; | n) $[ -(-3) + (-2) ]^2 \in \mathbb{Z}$ . |                              |

3. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a)  $\sqrt{2\frac{1}{4}} \in \mathbb{Q}$ ;

b)  $\sqrt{0,(2)} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ;

c)  $\sqrt{2^2 \cdot 3^3} \in \mathbb{Z}$ ;

d)  $0,(3) + \sqrt{0,(4)} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ;

e)  $\sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3} \in \mathbb{N}$ ;

f)  $\sqrt{2^3 \cdot 3^2 + 3\sqrt{144}} \in \mathbb{Z}$ ;

g)  $\{0\} \in \mathbb{R}$ ;

h)  $0 \notin \mathbb{R}^*$ ;

i)  $\{0\} \subset \mathbb{R}$ ;

j)  $2 \in \mathbb{Q} \setminus \{-2, 2\}$ .

4. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) Produsul a două numere iraționale este un număr irațional.

b) Suma oricăror două numere iraționale este un număr irațional.

c) Suma dintre un număr rațional și un număr irațional este un număr irațional.

d) Produsul dintre orice număr irațional și orice număr rațional nenul este un număr irațional.

e) Pătratul oricărui număr irațional este un număr rațional.

f) Orice număr irațional ridicat la puterea zero este un număr natural.

5. Amplificați fracțiile:  $\frac{6}{10}, \frac{18}{25}, \frac{3}{5}, \frac{7}{4}$  astfel încât să aibă același numitor.

6. Se consideră fracțiile:  $\frac{a}{10}, \frac{a}{12}, \frac{a}{15}$  și  $\frac{a}{30}$ , unde  $a \neq 0$ . Determinați cea mai mică valoare naturală a numărului  $a$ , pentru care fracțiile reprezintă simultan numere naturale.

7. a) Care dintre fracțiile:  $\frac{1}{4}, \frac{6}{10}, \frac{9}{15}, \frac{12}{18}, \frac{12}{20}, \frac{7}{15}, \frac{30}{25}, \frac{30}{50}$  sunt echivalente cu fracția  $\frac{3}{5}$ ?

b) Amplificați cu 4 fracțiile:  $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{13}{99}, \frac{8}{13}, \frac{5}{11}$ .

c) Simplificați cu 5 fracțiile:  $\frac{5}{20}, \frac{15}{30}, \frac{10}{175}, \frac{20}{45}, \frac{25}{110}, \frac{30}{85}$ .

8. Determinați din șirul următor de fracții:  $\frac{1}{2}, \frac{61}{37}, \frac{2}{6}, \frac{55}{1133}, \frac{4}{21}, \frac{3}{9}, \frac{8}{15}, \frac{14}{2 \cdot 7}, \frac{85}{15}, \frac{35}{56}, \frac{19}{72}, \frac{4 \cdot 3 \cdot 5}{60}$  pe cele care sunt:

(i) ireductibile;

(ii) subunitare;

(iii) supraunitare;

(iv) echiunitare.

9. Determinați valorile lui  $x$ , număr natural, pentru care:

a) (i)  $\frac{8}{x-3} \in \mathbb{N}$ ;

(ii)  $\frac{6}{x-2} \in \mathbb{Z}$ ;

(iii)  $\frac{15}{2x-1} \in \mathbb{N}$ ;

(iv)  $\frac{21}{2x+1} \in \mathbb{N}$ ;

b) mulțimile  $A = \{4x, 6x + 2\}$  și  $B = \{2x - 1, 2x + 1, 3x + 2\}$  au un singur element comun;

c) mulțimile  $A = \{2x - 3, 3x - 1\}$  și  $B = \{4x - 7, x + 3\}$  sunt egale.

10. Scrieți sub formă zecimală următoarele fracții:  $\frac{4}{5}, \frac{64}{25}, \frac{5}{16}, \frac{17}{125}, \frac{13}{3}, \frac{8}{15}, \frac{28}{15}, \frac{17}{6}, \frac{35}{18}$ .

11. Scrieți sub formă de fracție ordinară următoarele fracții zecimale: 4,15; 2,(18); 0,3(54); 2,534; 0,35(4); 1,8(6); 13,85; 5,02(7); 1,0025; 0,008; 2,00(3).

12. Determinați mulțimile:

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 13 \leq x^2 \leq 50\}$ ;

$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 24 \leq x^2 \leq 121\}$ ;

$C = \{x \in \mathbb{Z} \mid 18 \leq 2x^2 \leq 98\}$ ;

$D = \{x \in \mathbb{N} \mid 48 \leq 3x^2 \leq 192\}$ ;

$E = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 \leq \sqrt{x} \leq 7, \sqrt{x} \in \mathbb{N}\}$ ;

$F = \{x \in \mathbb{N} \mid 4 \leq \sqrt{x} < 10, \sqrt{x} \in \mathbb{N}\}$ .

13. Fie mulțimea  $A = \{0; -4; 25; -64; 0,36; 0,4; 3,(27)\}$ . Determinați mulțimea  $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \in A\}$ .

14. Fie mulțimea  $A = \left\{ \sqrt{12}; -\sqrt{\frac{2}{3}}; \sqrt{3\frac{1}{5}}; (-\sqrt{2})^{-1}; -\sqrt{7}; \sqrt{0,(3)} \right\}$ .

Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a)  $A \subset \mathbb{R}$ ;

b)  $A \subset (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ ;

c)  $A \subset \mathbb{Q}$ .

15. Fie mulțimea  $A = \left\{ (\sqrt{3})^{-1}; (-\sqrt{2})^3; \sqrt{2\frac{2}{3}}; -\sqrt{150}; \sqrt{192}; \sqrt{5^3}; -\sqrt{2^5} \right\}$ .

Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a)  $A \subset \mathbb{Q}$ ;

b)  $A \subset (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ ;

c)  $A \not\subset \mathbb{R}$ .

16. Fie mulțimea  $A = \left\{ (-2)^2; (-3)^{-2}; \sqrt{0,09}; \sqrt{5\frac{5}{9}}; (-1)^4; \sqrt{18}; \sqrt{1\frac{2}{25}}; \left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}; \sqrt{5\frac{3}{9}} \right\}$ .

Determinați mulțimile:  $A \cap \mathbb{N}$ ,  $A \cap \mathbb{Z}$ ,  $A \cap \mathbb{Q}$ ,  $A \cap \mathbb{R}$ ,  $A \cap (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z})$ ,  $A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ .

17. Determinați elementele mulțimilor:

$A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x + 3 \mid 36\}$ ;

$B = \{x \in \mathbb{N}^* \mid 2x + 1 \mid 45\}$ ;

$C = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 27 \text{ și } 8 \mid x + 5\}$ ;

$D = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid \frac{15}{2x+1} \in \mathbb{N} \right\}$ ;

$E = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{21}{2x+1} \in \mathbb{Z} \right\}$ ;

$F = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid \frac{2x+5}{x+1} \in \mathbb{N} \right\}$ ;

$G = \left\{ x \in \mathbb{Z} \setminus \{-2\} \mid \frac{3x+11}{x+2} \in \mathbb{Z} \right\}$ ;

$H = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{3x+9}{2x-3} \in \mathbb{Z} \right\}$ .

► În rezolvarea exercițiilor următoare folosiți, dacă este cazul, formula:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}, \text{ unde } C^2 = A^2 - B.$$

18. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a)  $\sqrt{5} - \sqrt{3} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ;

b)  $\sqrt{45} = \sqrt{20} + \sqrt{5}$ ;

c)  $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$ ;

d)  $\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}} = \sqrt{2}$ ;

e)  $\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}} - \sqrt{6} \in \mathbb{Q}$ ;

f)  $\sqrt{7+\sqrt{24}} - \sqrt{7-2\sqrt{6}} = (\sqrt{2})^2$ .

19. Demonstrați că următoarele numere nu sunt raționale:

a)  $\sqrt{5n+3}$ ;

b)  $\sqrt{5n+8}$ ;

c)  $\sqrt{7n+3}$ ;

d)  $\sqrt{n^2+n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ ;

e)  $\sqrt{4n^2+n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ ;

f)  $\sqrt{2007^{2010} - 2006^{2010}}$ ;

g)  $\sqrt{1+3+3^2+\dots+3^{2010}}$ ;

h)  $\sqrt{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2011 + 3}$ ;

i)  $\sqrt{456^{564} + 321^{312} + 215^{804}}$ .

20. Arătați că  $\sqrt{2-\sqrt{3}+\sqrt{5-\sqrt{13}+\sqrt{48}}} \in \mathbb{Q}$  și  $\sqrt{26-6\sqrt{13+4\sqrt{8-2\sqrt{6+2\sqrt{5}}}}} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

**21.** Determinați valoarea de adevăr a propozițiilor:

- a)  $\sqrt{x} \in \mathbb{R}$ ;      b)  $\sqrt{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ;      c)  $\sqrt{x} \in \mathbb{Z}$ ;      d)  $\sqrt{x} \in \mathbb{Q}$ ,

unde  $x = \sqrt{441 + 2 + 4 + 6 + \dots + 880}$ .

**22.** Determinați valoarea de adevăr a propozițiilor:

- a)  $\sqrt{x} \in \mathbb{R}$ ;      b)  $\sqrt{x} \in \mathbb{Z}$ ;      c)  $\sqrt{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ;      d)  $\sqrt{x} \in \mathbb{N}$ ,

unde  $x = \sqrt{243^2 - (240^2 + 3 \cdot 240)}$ .

**23.** Determinați valoarea de adevăr a propozițiilor:

- a)  $x \in \mathbb{R}$ ;      b)  $x \in \mathbb{Q}$ ;      c)  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ;      d)  $x \in \mathbb{Z}$ ,

unde  $x = \sqrt{2010 + 2(1 + 2 + 3 + \dots + 2009)}$ .

**24.** Determinați mulțimile:

a)  $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \setminus \{2\} \mid \frac{\sqrt{28 - 10\sqrt{3}} + \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} + \sqrt{18 + 8\sqrt{2}}}{x - 2} \in \mathbb{Z} \right\};$

b)  $B = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{21}} + \sqrt{39 + 12\sqrt{3}} + \sqrt{16 - 6\sqrt{7}}}{2x + 1} \in \mathbb{Z} \right\};$

c)  $C = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{\sqrt{15 - 6\sqrt{6}} + \sqrt{11 - 2\sqrt{30}} + \sqrt{41 + 12\sqrt{5}}}{2x - 1} \in \mathbb{Z} \right\}.$

**25.** Determinați numerele naturale  $\overline{ab}$ , știind că acestea îndeplinesc condițiile:  $\overline{ab} : 5$  și  $\sqrt{\overline{ab} + \overline{ba}} \in \mathbb{Q}$ .

**26. a)** Arătați că  $a = \sqrt{9^n \cdot 2^{2n+1} - 4^n \cdot 3^{2n}} \in \mathbb{Q}$ , pentru oricare  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**b)** Determinați  $n \in \mathbb{N}$ , astfel încât  $a = 216$ .

**27.** Determinați cifra  $x$ , în baza 10, astfel încât:

- a)  $\sqrt{\frac{14x}{27}} \in \mathbb{Q}$ ;      b)  $\sqrt{\frac{12x}{18}} \in \mathbb{Q}$ ;      c)  $\sqrt{\frac{72x}{5}} \in \mathbb{Z}$ ;      d)  $\sqrt{\frac{18x}{4}} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

**PE-PP SUPERMATE** ♦ ♦ ♦ ♦

**28.** Determinați numerele raționale  $a$  și  $b$  care îndeplinesc condiția:

- a)  $\frac{a}{\sqrt{2}-1} + \frac{b}{\sqrt{2}+1} = 7 - 3\sqrt{2}$ ;      b)  $a(2 + \sqrt{5}) + \frac{b}{3 - \sqrt{5}} = \sqrt{5} + 4$ ;      c)  $a\sqrt{3} + \frac{a}{2} + \frac{b}{\sqrt{3}-1} = 2\sqrt{3} + 5$ .

**29.** Fie numărul rațional  $r \in \mathbb{Q}$ . Dacă  $11r \in \mathbb{Z}$  și  $13r \in \mathbb{Z}$ , demonstrați că  $r \in \mathbb{Z}$ .



(1p) 2. Calculați  $A \cap B$ , unde  $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{15}{2x-1} \in \mathbb{Z} \right\}$  și  $B = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{4x+23}{2x+1} \in \mathbb{Z} \right\}$ .



(1p) **3.** Determinați  $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{52-14\sqrt{3}}}{2x-1} \in \mathbb{Z} \right\}$ .



(1p) 4. Determinați cifrele  $a$  și  $b$ , cu  $a < b$ , pentru care  $\sqrt{0, a(b) + 0, b(a)} \in \mathbb{Q}$ .

A large grid of graph paper with 20 columns and 10 rows. The grid is composed of small squares, with a slightly larger square at the top left corner, likely for a title or header. The grid is empty and ready for use.

|           |     |     |     |     |     |     |      |      |      |      |       |       |       |       |
|-----------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|------|------|------|-------|-------|-------|-------|
| Subiectul | I.1 | I.2 | I.3 | I.4 | I.5 | I.6 | II.1 | II.2 | II.3 | II.4 | III.1 | III.2 | III.3 | III.4 |
| Punctajul |     |     |     |     |     |     |      |      |      |      |       |       |       |       |
| Nota      |     |     |     |     |     |     |      |      |      |      |       |       |       |       |

## 2. REPREZENTAREA PE AXĂ. ORDONAREA NUMERELOR REALE. VALOAREA ABSOLUTĂ. APROXIMAREA NUMERELOR REALE



**Axa numerelor reale** este o dreaptă pe care fixăm un punct  $O$ , numit **origine**, un **sens pozitiv** și o **unitate de măsură**. Oricărui punct  $A$  de pe axă i se pune în corespondență un **unic număr real**, numit **abscisa punctului** și notat  $x_A$  (scriem  $A(x_A)$ ), respectiv oricărui număr real îi corespunde un unic punct pe axa numerelor reale, numit **imaginea** sa.

Dacă pe axa numerelor reale considerăm punctele  $A(x_A)$  și  $B(x_B)$ , atunci **lungimea segmentului**  $AB$  este numărul  $AB = |x_B - x_A|$ .

Fie  $x, y \in \mathbb{R}$ . Spunem că  $x \leq y$  dacă există un număr  $z \geq 0$ , astfel încât  $x + z = y$ .

În reprezentarea pe axă, cu sensul pozitiv spre dreapta, mai mare este numărul situat mai spre dreapta.

Fie  $x \in \mathbb{R}$ . **Modulul** sau **valoarea absolută** a numărului real  $x$  este numărul notat prin  $|x|$  și care, prin definiție, este egal cu  $|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ .

Amintim două proprietăți importante pentru modul:

(i)  $|x| = |-x|$ ;

(ii)  $|x + y| \leq |x| + |y|$ , pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$ .

Fie  $x \in \mathbb{R}$ . Se numește **partea întreagă** a numărului  $x$  numărul notat prin  $[x]$  care este cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu  $x$ .

**OBSERVAȚIE:** Fie  $x \in \mathbb{R}$ . Au loc următoarele proprietăți:

•  $[x] \leq x < [x] + 1$ ;

•  $[x + n] = [x] + n$ , pentru orice  $n \in \mathbb{Z}$ .

Fie  $x \in \mathbb{R}$ . Se numește **partea fracționară** a numărului  $x$  numărul notat prin  $\{x\}$  care este egal cu  $\{x\} = x - [x]$ .

**OBSERVAȚIE:**  $0 \leq \{x\} < 1$ . Fie  $x \in \mathbb{R}$ . Atunci  $\{x + n\} = \{x\}$ , pentru orice  $n \in \mathbb{Z}$ .

**EXAMPLE:** a)  $[+4] = 4$ ;  $[-4] = -4$ ;  $[4,1] = 4$ ;  $[-4,1] = -5$ ;  $[4,1 + 11] = [4,1] + 11 = 4 + 11 = 15$ ;  $[-4,1 + 11] = [-4,1] + 11 = -5 + 11 = 6$ .

b)  $\{4\} = 0$ ;  $\{4,1\} = 0,1$ ;  $\{-4,1\} = -4,1 - (-5) = 5 - 4,1 = 0,9$ .

Orice număr real  $x \in \mathbb{R}$  poate fi înlocuit cu o valoare numită **aproximarea** sa.

Cele mai folosite **procedee de aproximare** sunt:

a) **aproximarea prin lipsă sau adaos**. Fie  $x$  un număr real scris în formă zecimală. Aproximarea prin lipsă sau adaos se face la puterile lui 10 din scrierea sa zecimală:

(i) **aproximarea prin lipsă** nu modifică cifra aflată pe poziția puterii lui 10 din scrierea zecimală a numărului;

(ii) **aproximarea prin adaos** modifică cifra aflată pe poziția puterii lui 10 măbind-o cu o unitate din scrierea zecimală a numărului.

| aproximare   | prin lipsă | prin adaos |
|--------------|------------|------------|
| de o unitate | 6          | 7          |
| de o zecime  | 6,6        | 6,7        |
| de o sutime  | 6,64       | 6,65       |
| de o miime   | 6,641      | 6,642      |

**b) aproximarea prin rotunjire.** Fie  $x$  un număr real. Aproximarea prin rotunjire se face la puterile lui 10 din scrierea zecimală a numărului  $x$ , astfel:

- (i) ultima cifră la care se face rotunjirea rămâne neschimbată dacă după ea urmează 0, 1, 2, 3 sau 4;
- (ii) ultima cifră la care se face rotunjirea se mărește cu 1 dacă după ea urmează 5, 6, 7, 8 sau 9.

**EXEMPLU:** Fie  $x = 13,614972$ .

| rotunjire    | 13,614972 |
|--------------|-----------|
| de o unitate | 14        |
| de o zecime  | 13,6      |
| de o sutime  | 13,61     |
| de o miime   | 13,615    |

Fie  $x, y$  numere reale. Vom defini următoarele două numere reale:

- (i) **minimul dintre  $x$  și  $y$** , notat  $\min(x, y)$  și care, prin definiție, este:  $\min(x, y) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \leq y; \\ y, & \text{dacă } y < x; \end{cases}$
- (ii) **maximul dintre  $x$  și  $y$** , notat  $\max(x, y)$  și care, prin definiție, este:  $\max(x, y) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq y; \\ y, & \text{dacă } y > x. \end{cases}$

## ACTIVITĂȚI DE ÎNVĂȚARE

### PE ÎNȚELEGERE ♦

1. Reprezentați pe axă următoarele numere reale:

- a) 5; -3; 1;
- b) 2,5; -3,5;  $2^{-1}$ ;
- c)  $3\frac{1}{3}$ ; -0,5;
- d)  $(-4)^{-1}$ ; 0,25;
- e)  $-\sqrt{2}$ ;  $\sqrt{5}$ ;  $\sqrt{10}$ .

2. Reprezentați pe axa numerelor elementele mulțimilor:

- a)  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 5 \leq x < 11\}$ ;
- b)  $B = \{x \in \mathbb{Z}^+ \mid 1 \leq |x| < 4\}$ ;
- c)  $C = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{7}{2x+1} \in \mathbb{Z}\right\}$ ;
- d)  $D = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid \sqrt{(2x-3)^2} = 9\right\}$ ;
- e)  $E = \left\{x \in \mathbb{R} \mid |x - \sqrt{2}| = \sqrt{8}\right\}$ ;
- f)  $F = \left\{x \in \mathbb{Q} \mid \sqrt{(x-1)^2} = \frac{3}{4}\right\}$ .

3. (i) Calculați:

- a)  $|-3|$ ;
- b)  $|+7|$ ;
- c)  $|-3| + |+7|$ ;
- d)  $\left|-\frac{13}{47}\right|$ ;
- e)  $|- \sqrt{5}|$ ;
- f)  $|10 - \sqrt{2}|$ ;
- g)  $|\sqrt{3} - 10|$ ;
- h)  $|\sqrt{7} - \sqrt{5}|$ ;
- i)  $|2 - \sqrt{5}|$ ;
- j)  $|2 - 3 + 4 - 5 + \dots + 10 - 11|$ ;
- k)  $|-1| + |2| + |-3| + |-4|$ .

(ii) Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

- a)  $|-9| = -9$ ;      b)  $|-13| = |+13|$ ;      c)  $|-32| \leq 32$ ;      d)  $|1 - \sqrt{5}| = 1 - \sqrt{5}$ ;  
e)  $\left| -\frac{21}{8} \right| + \left| +\frac{3}{8} \right| = 3$ ;      f)  $-|+3,51| = -3,51$ ;      g)  $-|15 + 9| = 6$ ;      h)  $-|+7| = |-7|$ .

4. Ordonați crescător numerele:

- a)  $\frac{1}{3}; \frac{2}{5}; \frac{4}{6}; \frac{3}{10}$ ;      b)  $-2,25; -\frac{13}{2}; -\frac{11}{5}; -\frac{7}{25}$ ;      c)  $2,3(15); 0,23(15); 2,31(5); 2,(315)$ .

5. Ordonați crescător numerele:

- a)  $3\sqrt{6}; 5\sqrt{2}; 7; 4\sqrt{3}; 2\sqrt{13}$ ;      b)  $8\sqrt{2}; 5\sqrt{5}; 11; 2\sqrt{30}; 2\sqrt{31}$ ;  
c)  $4\sqrt{10}; 5\sqrt{6}; 7\sqrt{3}; 12; 9\sqrt{2}$ ;      d)  $19; 15\sqrt{2}; 6\sqrt{10}; 10\sqrt{3}; 12\sqrt{3}$ .

6. Fie numărul  $x = 3,5471863$ .

- a) Determinați aproximarea numărului  $x$  prin lipsă la sutime.  
b) Determinați aproximarea numărului  $x$  prin adaos la zecime de miime.  
c) Rotunjiți numărul  $x$  la:  
(i) a doua zecimală;      (ii) a cincea zecimală;      (iii) a șasea zecimală.

7. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

- a)  $6 < 9$ ;      b)  $\frac{1}{4} < \frac{1}{7}$ ;      c)  $-1,5 < -1,8$ ;      d)  $\sqrt{5} \leq \sqrt{5}$ ;  
e)  $\sqrt{2} \leq \sqrt{6}$ ;      f)  $\frac{16}{7} < \frac{16}{9}$ ;      g)  $\frac{2004}{2005} < \frac{2005}{2006}$ ;      h)  $-2 - \sqrt{5} \leq 3 - \sqrt{5}$ .

8. Puneți între numerele reale de mai jos unul dintre semnele „<”, „>”, „≤”, „≥”, astfel încât să obțineți propoziții adevărate:

- a)  $1,5 \square 1,9$ ;      b)  $\frac{1,45}{1,60} \square \frac{7}{8}$ ;      c)  $0,2^{-1} \square 0,3^{-1}$ ;  
d)  $1,73205 \square \sqrt{3}$ ;      e)  $64^{-1} \square 2^{-6}$ ;      f)  $-3,2(4) \square -3,(24)$ .

## PE APLICARE ȘI EXERSARE ◆ ◆

9. Aflați partea întreagă și partea fracționară a următoarelor numere reale:

- a)  $5\frac{3}{8}$ ;      b)  $-0,6$ ;      c)  $\sqrt{20,25}$ ;      d)  $-\sqrt{0,81}$ ;      e)  $15$ ;      f)  $-18$ .

10. Încadrați numărul  $x$  între două numere întregi, în fiecare dintre cazurile:

- a)  $x = 2\sqrt{3}(\sqrt{32} - \sqrt{128})$ ;      b)  $x = \sqrt{12}(\sqrt{54} - \sqrt{24})$ ;  
c)  $x = (-\sqrt{2})^5 : (-\sqrt{2}^2) - \sqrt{50}$ ;      d)  $x = \sqrt{243} : \sqrt{3^4} - \sqrt{108} : \sqrt{2^2}$ ;  
e)  $x = (-\sqrt{3})^6 : (-\sqrt{3})^3 + 2\left[(\sqrt{3})^2\right]^3 : (\sqrt{3})^{-7}$ .